

Analiza matematyczna I
Lista 2 (powtórka ze szkoły c. d.)

Zad 1. Podać ilustrację geometryczną następujących iloczynów kartezjańskich:

- a) $A \times B$, gdzie $A = [0, 1) \cup \{2\}$, $B = \{1\}$, b) $A \times B$, gdzie $A = [2, +\infty)$, $B = (-1, 1)$,
c) $A \times B$, gdzie $A = \mathbb{N}$, $B = (0, 1]$, d) $A \times B$, gdzie A jest okręgiem i $B = (a, b)$,
e) $A \times B$, gdzie $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 8} \geq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |y - 1| < 5\}$,
f) $A \times B$, gdzie $A = \{1, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, g) $A \times B$, gdzie $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$,
h) $A \times B \times C$, gdzie $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$, $C = \{1\}$,
i) $A \times B \times C$, gdzie $A = [0, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$, $C = (0, +\infty)$.

Zad 2. Obliczyć liczbę elementów w zbiorze $A \times B$, jeśli zbiór A jest n -elementowy, a zbiór B jest m -elementowy.

Zad 3. Sprawdzić czy prawdziwe są równości

- a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
c) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$, d) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$,
e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$, f) $(A \times B)' = A' \times B'$.

Zad 4. Określić dziedziny naturalne oraz zbiory wartości podanych funkcji. Zbadać ich ograniczoność

$$a(x) = \sqrt{\sin x}, \quad b(x) = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad c(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad d(x) = \log_3(1 + |x|),$$
$$e(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad f(x) = \frac{2^x}{2^x - 4}, \quad g(x) = x^4 + 2x^2 - 3, \quad h(x) = 3e^{-|x|}.$$

Zad 5. Znaleźć $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$, jeśli

- a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, b) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$, c) $f(x) = g(x) = \frac{1}{1-x}$
d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$,¹ $g(x) = \frac{1}{x}$, e) $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin 2x$.

Zad 6. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

$$a(x) = -4x + 4, \mathbb{R}; \quad b(x) = \sqrt[3]{x}, \mathbb{R}; \quad c(x) = \frac{1}{x^2}, (-\infty, 0);$$
$$d(x) = \frac{1}{2x + 1}, [1, \infty); \quad e(x) = 4x - x^2, [2, \infty); \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, [1, \infty).$$

Zad 7. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na swoich dziedzinach i znaleźć funkcje do nich odwrotne

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad b(x) = \sqrt{x} - 3, \quad c(x) = 1 - 3^{-x}, \quad d(x) = x^5 + \sqrt{3}, \quad e(x) = x^6 \operatorname{sgn} x,$$
$$f(x) = 3 - \sqrt[3]{x + 2}, \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ 2 + x & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \quad h(x) = \log_2^3(x + 1).$$

¹ $\operatorname{sgn} x = -1$, gdy $x < 0$; $\operatorname{sgn} x = 0$, gdy $x = 0$; oraz $\operatorname{sgn} x = 1$, gdy $x > 0$